$$[T]_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}_{can}}\,[T]_{\mathcal{B}'_{can}\leftarrow\mathcal{B}_{can}}\,P_{\mathcal{B}_{can}\leftarrow\mathcal{B}}$$

de $\mathbb{R}^2$ de $\mathbb{R}^3$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 13/2 & 0 \\ 1 & 5/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque Dans plusieurs cas on va devoir calculer

$P^{-1} \cdot \underbrace{B \cdot Q}_{=A}$ où $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ inv
$A \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$

Pour le faire :

$$\left[\, P \;\vdots\; A \,\right] \underbrace{\longrightarrow \cdots \longrightarrow}_{OEL} \underbrace{\left[\, I \;\vdots\; \tilde{A} \,\right]}_{FER}$$

et $\tilde{A} = P^{-1} \cdot A$!!

PROP. 8.13 Soient $T : V \to V'$ une AL
$\mathcal{B} \subseteq V$ base $\quad \mathcal{B}' \subseteq V'$ base

Alors,

(1) $v \in Ker(T)$ ssi $[v]_{\mathcal{B}} \in Ker([T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}})$

(2) $v' \in Img(T)$ ssi $[v']_{\mathcal{B}'} \in Img([T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}})$

(3) T injective ssi $[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ est injective

(4) T surjective ssi $[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ est surjective

$\boxed{\text{EXM 8.12 (suite)}}$

$T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(1) \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$

$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

On a déjà calculé $[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculer une base de $Ker(T)$.

si $\underbrace{A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\leftarrow [T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}}$ $\rightsquigarrow$ on calcule $\mathrm{Ker}(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 2\underbrace{x_3}_{\text{var libre}} = 0 \end{cases}$$

est déjà PER

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -2x_3 \end{matrix} \Rightarrow \mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{base de } \mathrm{Ker}(A)}$$

$$\begin{matrix} \mathbb{P}_2 & \xleftrightarrow{\text{bij}} & \mathbb{R}^3 \\ p & \longmapsto & [p]_{\mathcal{B}} \end{matrix}$$

$$\alpha.1+\beta.t+\gamma t^2 \longleftarrow\!\!| \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$

car $\mathcal{B}=\{1,t,t^2\}$

$$0.1+(-2).t+1.t^2 \longleftarrow\!\!| \begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$$

$$= -2t+t^2$$

et $\{-2t+t^2\}$ base de $\mathrm{Ker}(T)$ $\longleftrightarrow$ $\left\{\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}\right\}$ base de $\mathrm{Ker}([T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}})$

En plus, la PROP nous dit que T est surj, car $[T]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}$ possède un pivot par ligne.

Chapitre 9 : Valeurs et vecteurs propres

DEF. 9.2-9.3 Soit $T : V \to V$ une AL. On dit que $v \in V$ $\boxed{\text{non nul}}$ est un vecteur propre de T de valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ si $T(v) = \lambda . v$

De même, si $A \in M_n(\mathbb{R})$, on dit que $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ $\boxed{\text{non nul}}$ est un vecteur propre de A de valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ si $A.\bar{v} = \lambda . \bar{v}$

EXM 9.4 Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, vérifier que

$\bar{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A. Quelle est la valeur propre ??

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 20 \end{pmatrix} = \underbrace{-4}\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lambda = -4}$$

DEF 9.9 On définit l'espace propre de $T: V \to V$ A.L de valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ par

$$E_\lambda = \{ v \in V : T(v) = \lambda v \}$$

De même, l'espace propre d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ de valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ est

$$E_\lambda = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^n : A.\bar{v} = \lambda \bar{v}\}$$

$\boxed{\text{LEMME 9.14}}$ $E_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda . \mathrm{Id})$

application identité $V \rightarrow V$, $v \mapsto v$

pour $T : V \to V$ AL

et

$E_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda . I_n)$

pour $A \in M_n(\mathbb{R})$

matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$

(Preuve) (Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$)

$\tilde{A} = A - \lambda . I_n \implies \mathrm{Ker}(\tilde{A}) = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^n : \tilde{A}.\bar{v} = 0\}$

$$= \{\bar{v} \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I_n)\bar{v} = 0\}$$

$$= \{v \in \mathbb{R}^n : A.\bar{v} - \lambda . I_n.\bar{v} = 0\}$$

$$= \{\bar{v} \in \mathbb{R}^n : A.\bar{v} - \lambda.\bar{v} = 0\}$$

$$= \{\bar{v} \in \mathbb{R}^n : A.\bar{v} = \lambda \bar{v}\} \stackrel{\text{def}}{=} E_\lambda \quad \square$$

PROP. 9.16 | λ est valeur propre de A ssi $\det(A - \lambda . I_n) = 0$

DÉF. 9.18 | Le polynôme caractéristique de A est $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda . I_n)$

PROP 9.16 nous dit que les racines de $P_A(\lambda)$ sont précisément les valeurs propres de A.

EXM 9.4 (suite) | Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.

$\left(A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \right)$

$$P_A(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \det\left(A - \lambda . I_2\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 5 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda) - 30 = \lambda^2 - 3\lambda - 28$$

raízes: $\dfrac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4.(-28)}}{2}$ $\begin{cases} \to -4 \\ \to 7 \end{cases}$